CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit.

I. EXERCICE

1. Résoudre l'équation différentielle $y'(x) = e^{x+y}$.
On écrira l'équation des courbes intégrales sous la forme $F(x, y) = 0$,
puis sous la forme $y = f(x)$, en précisant sur quels intervalles les solutions f sont définies.
2. Préciser et tracer la courbe solution telle que $y(0) = 0$.
3. Montrer que toutes les courbes solutions ont un axe de symétrie commun.
4. Par quelle transformation géométrique les courbes solutions se déduisent-elles les unes des autres ?

II. EXERCICE

On considère dans $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, les normes définies pour $X(x, y)$ par :

$$\|X\|_1 = |x| + |y|, \text{ et } \|X\|_\infty = \text{Sup}\{|x|, |y|\}.$$

1. Déterminer deux réels positifs α et β tels que $\alpha\|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq \beta\|X\|_\infty$.
2. On pose pour a et b réels, $N(X) = a\|X\|_1 + b\|X\|_\infty$.
On considère les vecteurs $X(1, 0)$, $Y(0, 1)$, $X'(1, 1)$ et $Y'(-1, 1)$.
Calculer $N(X)$, $N(Y)$, $N(X')$ et $N(Y')$.
En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme est :
$$a \geq 0,\ b \geq 0,\ (a, b) \neq (0, 0).$$
On supposera cette condition vérifiée par la suite.
3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O.
Pour toute norme, on appelle boule de centre O et de rayon R, et on note $\mathcal{B}(O, R)$ l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{OM}\| \leq R$. Montrer que $A \in \mathcal{B},\ B \in \mathcal{B}, \Rightarrow [AB] \subset \mathcal{B}$.
4. La sphère unité étant l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{OM}\| = 1$, construire sur un même repère les sphères unités $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_\infty$ et $\mathcal{S}_N$ dans le cas $a = b = \frac{1}{2}$. (On indiquera d'abord leurs éléments de symétries).
5. On note $\mathcal{B}_1(O, R)$, $\mathcal{B}_\infty(O, R)$ et $\mathcal{B}_N(O, R)$ les boules de centre O et de rayon R pour les normes respectives $\|\ \|_1$, $\|\ \|_\infty$ et N. Montrer qu'il existe un nombre R tel que :
$$\mathcal{B}_1(O, R) \subset \mathcal{B}_N(O, 1) \subset \mathcal{B}_\infty(O, R).$$

PROBLEME

PARTIE A

a désigne un réel strictement positif, ln la fonction logarithme népérien.

On étudie dans cette partie les trois affirmations suivantes :

(A_1) $\quad \exists\ a_0 > 0,\ \forall x > 0,\quad (a \geq a_0 \Rightarrow \ln x \leq x^a)$,

(A_2) $\quad \forall\ a > 0,\ \exists\ x_0 > 0,\quad (x \geq x_0 \Rightarrow \ln x \leq x^a)$,

(A_3) $\quad \exists\ x_1 > 0,\ \forall\ a > 0,\quad (x \geq x_1 \Rightarrow \ln x \leq x^a)$.

On définit, pour $a > 0$, la fonction f_a, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, par $f_a(x) = x^a - \ln x$.

1. Etudier les variations de f_a ; préciser son comportement pour $x \longrightarrow 0^+$.
2. En déduire que l'affirmation (A_1) est vraie.
3. Rappeler $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^a}$ et déterminer la limite de f_a pour $x \longrightarrow +\infty$.
4. En déduire que (A_2) est vrai.
5. Discuter l'affirmation (A_3).

PARTIE B

On pose pour n entier naturel non nul :

$$I_n(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{x} \frac{dt}{t(\ln t)^n} \text{ si } 0 < x < 1,\ J_n(x) = \int_{e}^{x} \frac{dt}{t(\ln t)^n} \text{ si } x > 1.$$

On définit la fonction g_n de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ dans $\mathbb{R}$, par $g_n(x) = \begin{cases} I_n(x) \text{ si } 0 < x < 1 \\ J_n(x) \text{ si } x > 1 \end{cases}$

et on note Γ_n la courbe représentative de g_n en repère orthonormé.

1. Déterminer, sans calculer les intégrales I_n et J_n, une relation entre $g_n(x)$ et $g_n(\frac{1}{x})$.
   g_n est-elle prolongeable en $x = 1$?
2. Déterminer les intersections de Γ_n avec l'axe des abscisses et écrire les équations des tangentes à Γ_n en ces points. On notera M_n leur point commun. Préciser M_{2p}.
3. Que peut-on dire de ces tangentes si n est impair ?
4. On pose $e = \tan \alpha$, avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$; justifier cette écriture et exprimer en fonction de α les coordonnées du point M_{2p+1}.

5. Calculer I_n et J_n.

6. Représenter Γ_1 pour $x \leq 4$, et les tangentes à Γ_1 aux points d'intersection avec l'axe des x.
(Echelle 5 cm sur les axes, on prendra $e \approx 2{,}7$ et $\frac{1}{e} \approx 0{,}37$).

PARTIE C

On considère pour a réel non nul la famille h_a de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h_a(x) = x^{1-x^a} = e^{(1-x^a)\ln x},$$

et on note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de h_a en repère orthonormé.

1. Etudier les variations de h_a. Montrer que $h'_a(x)$ est du signe de $\varphi_a(x) = x^{-a} - a \ln x - 1$.

2. Indiquer le comportement de h_a au voisinage de 0 ;
préciser, quand elle existe, la tangente à $\mathcal{C}_a$ au point d'abscisse $x = 0$.

3. Etudier le comportement de h_a quand x tend vers l'infini.
Montrer que si $a < 0$, $h_a(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln x}{x^{-a-1}}$.
Pour quelles valeurs de a, la courbe $\mathcal{C}_a$, admet-elle une asymptote quand $x \longrightarrow +\infty$?

4. Pour n entier naturel, on pose $u_n = h_a(n) - n$. Pour quelles valeurs de a la série de terme général u_n est-elle convergente ?

5. À x fixé positif, le nombre $h_a(x)$ est une fonction H_x du réel a ; étudier H_x.
En déduire la région du premier quadrant ($x > 0$, $y > 0$) balayée par les courbes $\mathcal{C}_a$.
Préciser les points communs à $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ pour $a \neq b$.

6. Soit un point M(x, y) donné du premier quadrant.
Discuter suivant M l'existence d'une valeur de a telle que $\mathcal{C}_a$ passe par M.
Comparer avec les résultats de la question **5**.
Montrer que si a existe il est donné par $a = \dfrac{1}{\ln x}\left[g_1\left(\dfrac{x}{y}\right) - g_1(x)\right]$, où g_1 est la fonction définie dans la **partie B**

7. Combien peut-on mener de tangente à $\mathcal{C}_a$ issues de l'origine ?
Déterminer quand a varie le lieu des points de contact.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail